Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

Обласна олімпіада юних математиків

Умови та розв’язання задач

2 тур

24 січня 2016 року

Спитати – сором на хвилину.
Не знати – сором на все життя.
Японське прислів’я

7 клас

1. На дошці записані числа 1, 2, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 20 та 25. Андрій та Олеся витерли по чотири різних числа. При цьому виявилось, що сума чисел, які витер Андрій, рівно у 5 разів менша за суму чисел, що витерла Олеся. Які числа можуть залишитись не витертими? Наведіть усі можливі відповіді.

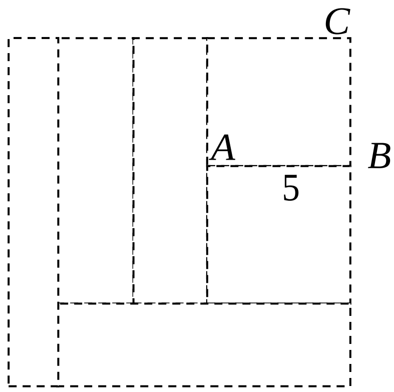

Рис. 1

Відповідь: 8 та 11.
Розв'язання. Сума чотирьох найменших чисел дорівнює 15. Сума чотирьох найбільших дорівнює $75=15\cdot 5$. Якщо припустити, що Андрій витер не чотири найменші числа, то їх сума не менша за 16, а тому сума чисел, що витерла Олеся повинна бут не меншою від 80, що неможливо. Таким чином Андрій мав витерти числа $1, 2, 5, 7$, сума яких 15. Аналогічно, якщо Олеся має витерти не чотири найбільші числа, то їх сума буде меншою від $75=15\cdot 5$, що порушує умову. Одержана суперечність показує, що Олеся повинна витерти чотири найбільші числа. Тому залишаються не витертими числа 8 та 11.

2. Квадрат розбитий на 6 прямокутників однакової площі, як це показане на рис. 1. Знайдіть довжину відрізку BC, якщо $AB=5$.

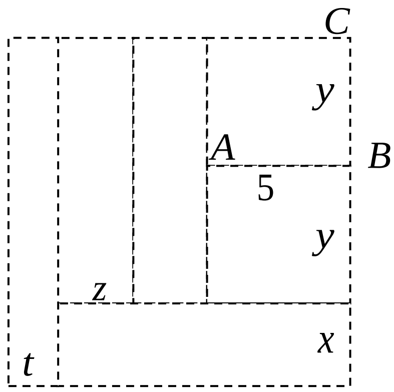

Рис. 2

Відповідь: $\frac{24}{5}$.
Розв'язання. Позначимо послідовно відрізки, як на рис. 2. Тоді

$$5y = z\cdot 2y \Rightarrow z=\tfrac{5}{2}.$$

$$(2z+5)x=5y \text{ або } 10x=5y \Rightarrow x=\tfrac{y}{2}.$$

$$(2y+x)t=5y \text{ або } \tfrac{5}{2}yt=5y \Rightarrow t=2.$$

Тепер скористаємось тим, що це квадрат, тобто

$$2y+x=2z+5+t \text{ або } \tfrac{5y}{2}=12 \Rightarrow y=\tfrac{24}{5}.$$

3. На площині заданий трикутник ABC, у якого сторона $AB=6$ см. У вершинах A та B цього трикутника сидять 2 мурахи. Вони починають повзти по його сторонах у протилежних напрямах з постійними, але, можливо, різними швидкостями. Вперше вони зустрічаються у вершині C, вдруге зустрілися у вершині A, втретє – у вершині B. Чому дорівнює довжина сторони AC цього трикутника?

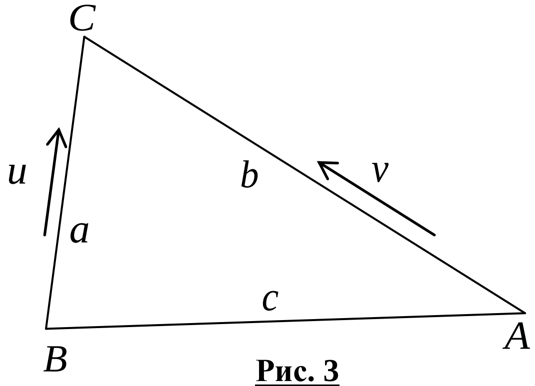

Рис. 3

Відповідь: 6 см..
Розв'язання. Позначимо довжини сторін трикутника через $AB=c$, $BC=a$ та $CA=b$. Швидкості мурахи, що починає з вершини A позначимо через v, іншої – через u. Оскільки їх перша зустріч відбулася у вершині C, то вони рухаються у напрямах, як це показане на рис. 3. Тоді з умови першої зустрічі маємо:

$$\tfrac{b}{v}=\tfrac{a}{u} \text{ або } bu=av. \qquad \textbf{(1)}$$

Умова другої зустрічі записується таким чином:

$$\tfrac{a+c}{v}=\tfrac{b}{u} \text{ або } (a+c)u=bv. \qquad \textbf{(2)}$$

Умова третьої зустрічі записується таким чином:

$$\frac{b+a}{v}=\frac{c}{u} \text{ або } (b+a)u=cv. \qquad \textbf{(3)}$$

З (2) та (3) маємо: $au=bv-cu=cv-bu$. Але тоді $v(b-c)=u(c-b)$. Якщо $b\neq c$, то рівність неможлива, оскільки маємо числа різних знаків. Тому $b=c=6$ см.

4. Знайдіть найменше натуральне число N, для якого з довільних N натуральних чисел завжди можна вибрати 4 числа, сума яких ділиться на 4.

***Відповідь*:** 7.

Розв'язання. Зрозуміло, що можна розглядати числа за модулем 4. Те, що 6 чисел може не вистачити підтверджує такий приклад: $0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 1;\ 1$.

Покажемо, що з 7 чисел завжди можна вибрати шуканий набір. В основі міркувань буде таке просте твердження – з трьох натуральних чисел завжди можна вибрати два, сума яких парна.

Позначимо числа: $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_7$. Тоді з них можна вибрати 3 пари чисел, у кожній з яких сума парна. Без обмеження загальності будемо вважати, що

$$a_1+a_2=2b_1,\ a_3+a_4=2b_2,\ a_5+a_6=2b_3.$$

З цих трьох чисел можна вибрати два, сума яких парна, наприклад, це перші два числа, тоді

$$b_1+b_2=2x\ \Rightarrow\ a_1+a_2+a_3+a_4=2(b_1+b_2)=4x,$$

що й треба було довести.

8 клас

1. У рівносторонньому трикутнику ABC на сторонах AB, BC та AC вибрані точки F, D та E відповідно таким чином, що $DF\perp AB$ та пряма ED є серединним перпендикуляром відрізку CF. Знайдіть величину $\angle DEF$.

Відповідь: $45°$.

Розв'язання. З умов задачі випливає, що (рис. 4) $\angle DFE=\angle DCA=60°\ \Rightarrow\ \angle AFE=30°$, тому

$$\angle FEA=90°\ \Rightarrow\ \angle FED=\angle DEC=\tfrac{1}{2}\cdot 90°=45°.$$

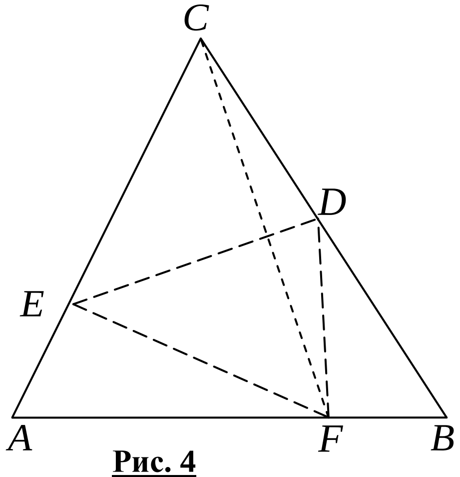

Рис. 4

2. У кожну комірку таблиці 6×7 (6 рядків та 7 стовпчиків) записані 0 або 1 таким чином, що суми чисел у кожному рядку різні, а суми чисел у кожному стовпчику однакові. Чому може дорівнювати сума чисел у першому стовпчику?

***Відповідь*:** 3.

Розв'язання. Сума семи чисел у рядку може приймати одне з 8 значень: $0;1;\ldots;7$, оскільки рядків 6, то рівно два з цих значень відсутні. Позначимо ці значення x та y. Тоді сума усіх чисел таблиці дорівнює $0+1+\ldots+7-(x+y)=28-(x+y)=7l$. Звідси $x+y\,\vdots\,7$, а тому єдине можливе значення $x+y=7$, тому сума чисел таблиці 21, тобто сума чисел у кожному стовпчику 3.

Залишається навести приклад, що це значення досягається (рис. 5).

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

Рис. 5

3. Відомо, що для деякого значення a справджується рівність: $a^4-\frac{1}{a^2}=2$. Чи може бути цілим число $x=a^4+\frac{1}{a^2}$?

Відповідь: не може.

Розв'язання. Якщо додати ці два рівняння, то матимемо рівність $2+x=2a^4$, якщо відняти, то $x-2=\frac{2}{a^2}$. Далі маємо, що

$$(2+x)(x-2)^2=2a^4\cdot\frac{4}{a^4}=8 \Leftrightarrow x^3-2x^2-4x+8=8 \Leftrightarrow x(x^2-2x-4)=0.$$

Очевидно, що значення $x=0$ умову не задовольняє. Але інших цілих розв'язків рівняння $x^2-2x-4=0$ не має, оскільки $(x-1)^2=5$, що неможливо.

4. Знайдіть найменше натуральне число N, для якого з N натуральних чисел завжди можна вибрати 8 чисел, сума яких ділиться на 8.

Відповідь: 15.

Розв'язання. Зрозуміло, що можна розглядати числа за модулем 8. Те, що 14 чисел може не вистачити підтверджує такий приклад: $\underbrace{0;\,0;\,\ldots;0}_{7};\,\underbrace{1;\,1;\,\ldots;1}_{7}$.

Покажемо, що з 15 чисел завжди можна вибрати шуканий набір. В основі міркувань буде таке просте твердження – з трьох натуральних чисел завжди можна вибрати два, сума яких парна.

Позначимо числа: $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_{15}$. Тоді з них можна вибрати 7 пар чисел, у кожній з яких сума парна. Тоді без обмеження загальності будемо вважати цілими такі числа:

$$b_1=\frac{a_1+a_2}{2},\,\ldots,\,b_7=\frac{a_{13}+a_{14}}{2}.$$

З цих 7 чисел можна вибрати три пари, сума яких парна, тобто можна вважати цілими такі числа:

$$c_1=\frac{b_1+b_2}{2},\,\ldots,\,c_3=\frac{b_5+b_6}{2}.$$

З цих трьох чисел можна вибрати два, сума яких парна, наприклад, це число $x=\frac{c_1+c_2}{2}$, але тоді

$$x=\frac{c_1+c_2}{2}=\frac{b_1+\ldots+b_4}{4}=\frac{a_1+\ldots+a_8}{8},$$

що й треба було довести.

9 клас

1	**1**	**1**
1	**1**	**3**
2	**4**	**3**

Рис. 6

1. У кожну комірку таблиці 3×3 записане деяке натуральне число (не усі числа обов'язково різні) таким чином, що шість сум чисел – трьох рядків та трьох стовпчиків – попарно різні. Яке найменше значення може мати сума усіх 9 чисел таблиці?

Відповідь: 17.

Розв'язання. Сума трьох чисел у рядку чи стовпчику не може бути меншою від 3, тому сума усіх чисел по рядках та по стовпчиках дорівнює $2S$. З іншого боку вона не може бути меншою за таку суму: $3+4+5+6+7+8=33$. Тому $S\geq17$. Тепер наведемо приклад таблиці, для якої це досягається (рис. 6).

2. Точки $D,\,E,\,F$ лежать на описаному колі ΔABC таким чином, що $AD,\,BE,\,CF$ - діаметри цього кола. Прямі $CD,\,AE,\,BF$ у перетині утворюють $\Delta A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай точки перетинів показані, як на рис. 7. З умов задачі випливає, що

$\angle BAA_1=\angle ACA_1=90^\circ \Rightarrow \angle BAC+\angle CAA_1=90^\circ$ та $\angle CAA_1+\angle AA_1C=90^\circ \Rightarrow$ $\angle BAC=\angle AA_1C$. Аналогічно доводяться рівності інших пар кутів.

3. Знайдіть усі такі функції $f : \mathrm{Z}^+ \to \mathrm{Z}^+$, для яких справджуються такі умови:

- $f(mn) = f(m) + f(n)$;
- $f(2016) = 0$;
- $f(n) = 0$, якщо $n \equiv 5 \pmod{2016}$.

Z^+ -- *це множина натуральних чисел та* 0.

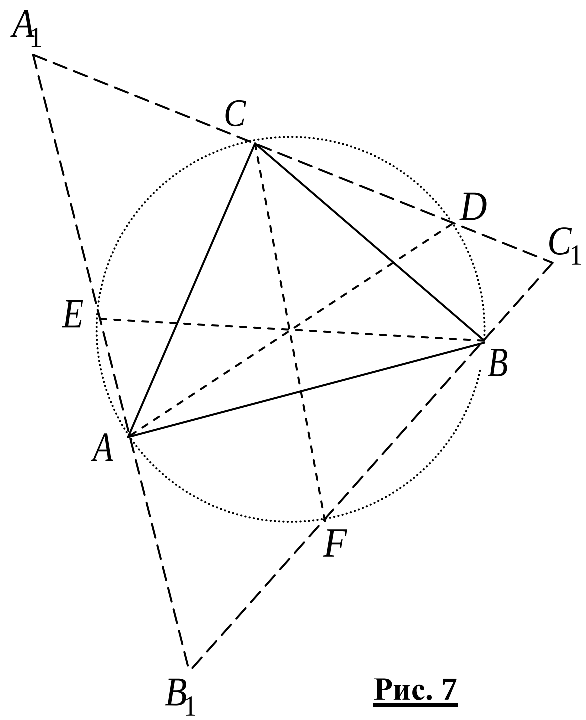

Рис. 7

Відповідь: $f \equiv 0$.

Розв'язання. Оскільки $\forall n \in \mathrm{Z}^+ \quad f(n) \ge 0$, то з того що $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ маємо:

$$0 = f(2016) = 5f(2) + 2f(3) + f(7) \ge 0,$$

звідси маємо, що $f(2) = f(3) = f(7) = 0$.

Тепер для двох чисел m, n, що пов'язані умовою $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c n$ маємо, що

$$f(m) = f(2^a \cdot 3^b \cdot 7^c n) = af(2) + bf(3) + cf(7) + f(n) = f(n).$$

Тепер можемо розглядати лише числа, що взаємно прості з 2016. Для такого числа m існує число k, що $mk \equiv 1 \pmod{2016}$. А далі просто маємо, що

$$f(5km) = 0 = f(5) + f(k) + f(m) \Rightarrow f(m) = 0.$$

4. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c справджується нерівність:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \ge \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(ab + bc + ca)^2}.$$

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання. Нагадаємо відому нерівність, яку часто використовують при доведенні нерівностей:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_1)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Зробимо такі перетворення:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{a^4}{a^2bc} + \frac{b^4}{ab^2c} + \frac{c^4}{abc^2} \ge \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{abc(a + b + c)} \ge \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(ab + bc + ca)^2}.$$

Для останнього переходу достатньо довести, що справджується така нерівність:

$$(ab + bc + ca)^2 \ge 3abc(a + b + c) \Leftrightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \ge abc(a + b + c),$$

що можна одержати простим розкриттям дужок, а остання нерівність – це нерівність трьох квадратів, для чисел $x = ab,\ y = bc,\ z = ca$.

10 клас

1. Для кожного натурального n многочлен $P(n)$ задовольняє умову $P(5^n - 1) = 5^{5n} - 1$. Чому дорівнює величина $P(3)$?

Відповідь: 1023.

Розв'язання. Позначимо через $x = 5^n - 1$, тоді $5^n = x + 1$, звідси

$$5^{5n}-1=(5^n-1)(5^{4n}+5^{3n}+5^{2n}+5^n+1)=$$
$$=x((x+1)^4+(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)^n+1)=3\cdot(256+64+16+4+1)=1023.$$

2. Всередині заданого квадрату $ABCD$ зі стороною 1 вибирається точка P. Пряма DP перетинає відрізок AC у точці E. Пряма CP перетинає відрізок BD у точці F. Знайдіть геометричне місце таких точок P, для яких відрізок $EF \| AD$.

Відповідь: коло, з центром в середині сторони DC і радіусом $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Розташуємо систему координат XOY, для якої $D=O$, $B(1;1)$. Позначимо $P(a;b)$ та випишемо рівняння потрібних прямих (рис. 8):

DP: $y=\frac{b}{a}x$, AC: $y=1-x$, тоді абсциса точки $E=AC\bigcap DP$ дорівнює $x_E=\frac{a}{a+b}$.

CP: $\frac{x-1}{a-1}=\frac{y}{b}$, або $y=\frac{bx}{a-1}-\frac{b}{a-1}$, BD: $y=x$, тоді абсциса точки $F=BD\bigcap CP$ дорівнює $x_F=\frac{b}{b-a+1}$.

Умова паралельності прямих $EF \| AD$ означає рівність $x_E=\frac{a}{a+b}=x_F=\frac{b}{b-a+1}$, звідки

$$ab-a^2+a=ab+b^2 \text{ або } (a-\tfrac{1}{2})^2+b^2=\tfrac{1}{4},$$

тобто шукане ГМТ – це коло, з центром в середині сторони DC і радіусом $\frac{1}{2}$.

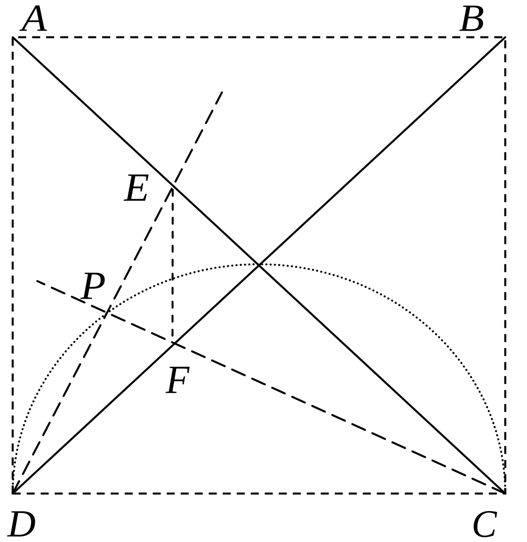

Рис. 8

3. Задача 9.3

4. Яких трикутників з цілими сторонами більше – таких, що мають периметр 2013 чи таких, що мають периметр 2016?

Відповідь: однакова кількість.

Розв'язання. Покажемо, що кожному трикутнику одного типу відповідає рівно один трикутник іншого типу. Дійсно, нехай цілі числа a, b, c сторони трикутника з периметром 2013. Тоді йому відповідає трикутник зі сторонами $a+1, b+1, c+1$. Дійсно, з нерівності трикутника для більшої сторони маємо $a+b>c$, тоді й для нового трикутника справджується аналогічна нерівність трикутника: $(a+1)+(b+1)>c+1$. Таким чином трикутників з периметром 2016 не менша ніж трикутників з периметром 2013.

Тепер навпаки, розглянемо трикутник зі сторонами $a\le b\le c$ периметром 2016. Тоді серед сторін не може бути однієї із сторін довжини 1. Дійсно, якщо $a=1$, то тоді $b+c=2015$. Тобто ці числа різні, а тому $c-b\ge 1=a$, що суперечить нерівності трикутника. Таким чином усі сторони більші 1, тому $a-1, b-1, c-1$ - натуральні числа. Крім того, з умови $a+b>c$ випливає, що $(a-1)+(b-1)\ge c-1$. Якщо припустити, що має місце рівність $(a-1)+(b-1)=c-1$ (яка могла б порушити нерівність трикутника), то

$$a+b+c=2016=(a-1)+(b-1)+(c-1)+3=2(c-1)+3,$$

звідки число $2(c-1)$ -- непарне. Одержана суперечність показує, що існує трикутник зі сторонами $a-1, b-1, c-1$. Таким чином обох типів трикутників однакова кількість.

11 клас

1. На кожній грані кубу написано натуральне число. Після цього у кожній вершині напишемо число, що дорівнює добутку трьох чисел, що написані на трьох гранях з цією вершиною. Знайдіть суму усіх чисел на гранях, якщо сума чисел у вершинах дорівнює 2015.

Відповідь: 49.
Розв'язання. Якщо позначити числа на протилежних гранях через a, c, b, d та x, y, то задана умова запишеться таким чином:
$abx + axd + ayd + aby + cbx + cxd + cyd + cby = 2015$.
Розкладемо ліву та праву частини на множники і матимемо, що справджується рівність:

$$(a + c)(b + d)(x + y) = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$

Оскільки це єдиний розклад на прості множники, то без обмеження загальності можемо вважати, що $a + c = 5;\ b + d = 13;\ x + y = 31$, звідки $a + c + b + d + x + y = 49$.

2. Задача 10.2

3. Знайдіть усі такі функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, для яких для усіх дійсних чисел x, y справджується рівність:

$$f(xf(x) + f(xy)) = f(x^2) + yf(x).$$

Відповідь: $f(x) = x$ та $f(x) = 0$.
Розв'язання. Покладемо в задане рівняння $x = 0$:

$$f(f(0)) = f(0) + yf(0).$$

Оскільки y -- довільне, то $f(0) = 0$.
Нехай $f(1) = c$, покладемо в умову $x = 1$

$$f(c + f(y)) = c(1 + y).$$

Якщо $c = 0$, то $f(f(y)) = 0$. Подіємо функцією f на задане рівняння. Тоді ліва частина стає нулем:

$$f(f(x^2) + yf(x)) = 0.$$

Якщо тепер для деякого t маємо $f(t) \neq 0$, то з рівності $f(t^2) + yf(t) = t$ підберемо відповідне y, звідки отримаємо суперечність: $f(t) = 0$. Звідси перший розв'язок цього рівняння $f(x) = 0$.
Якщо $c \neq 0$, то функція f -- ін'єктивна. Покладемо у початкове рівняння $y = 0$

$$f(xf(x)) = f(x^2) \Rightarrow xf(x) = x^2.$$

Таким чином, знаходимо другий розв'язок рівняння: $f(x) = x$.
Перевіркою переконуємось, що обидві функції задовольняють умову.

4. Для яких цілих чисел a, b вираз $(19a + b)^{18} + (a + b)^{18} + (a + 19b)^{18}$ є точним квадратом цілого числа?

Відповідь: $a = b = 0$.
Розв'язання. Припустимо, що цей вираз є квадратом для пари $(a, b) \neq (0; 0)$. Серед усіх таких пар виберемо таку, для якої сума $|a| + |b|$ -- мінімальна.

З малої теореми Ферма $q^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, якщо q не ділиться на 19. Таким чином кожний доданок виразу в умові за модулем 19 дорівнює 0 або 1. Тоді сума цих доданків може дорівнювати одному з чисел: $\{0; 1; 2; 3\}$. Оскільки квадрат цілого числа за модулем 19 може дорівнювати з цих чисел лише 0 або 1 (у цьому можна переконатися простим перебором), то можливі лише два варіанти: серед цих доданків рівно два кратні 19 або усі три кратні 19. Перший випадок неможливий. Якщо, наприклад, кратне 19 доданки $19a+b$ та $a+19b$, то звідси випливає, що кратне 19 і кожне з чисел a, b, а тому й $a+b$. Так само і інший варіант. Тому кожний з доданків кратний 19, звідси $a=19a_1$ та $b=19b_1$, при цьому $(a_1, b_1) \neq (0; 0)$. Тоді заданий вираз можна перетворити таким чином:

$$(19a+b)^{18}+(a+b)^{18}+(a+19b)^{18}=19^{18}\cdot((19a_1+b_1)^{18}+(a_1+b_1)^{18}+(a_1+19b_1)^{18}),$$

звідси $(19a_1+b_1)^{18}+(a_1+b_1)^{18}+(a_1+19b_1)^{18}$ також є точним квадратом, але має менше значення $|a_1|+|b_1|$, що суперечить вибору пари $(a, b) \neq (0; 0)$. Тому єдиний можливий варіант $a=b=0$.