Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

Обласна олімпіада юних математиків

Умови та розв'язання задач

1 тур

17 січня 2016 року

Ви думаєте, усе так просто?
Так, усе просто. Але зовсім не так
Альберт Ейнштейн

7 клас

1. Дідусь, тато та онук пробігли дистанцію від дому до крамниці та назад. При цьому онук туди і назад біг з однаковою швидкістю. Дідусь туди біг удвічі швидше за онука, а назад у 3 рази повільніше. Тато біг туди удвічі повільніше за онука, а назад у 3 рази швидше. В якому порядку вони повернуться додому?

Відповідь: першим прибіг онук, другим – тато, останнім – дідусь.
***Розв'язання*.** Позначимо швидкість онука через x, а відстань через S. Тоді час забігів онука, тата та дідуся відповідно дорівнюють:

$$t_1 = \frac{S}{x} + \frac{S}{x},\; t_2 = \frac{S}{\frac{1}{2}x} + \frac{S}{3x},\; t_3 = \frac{S}{2x} + \frac{S}{\frac{1}{3}x}.$$

Тобто треба порівняти такі числа:

$$a_1 = 2,\; a_2 = 2 + \tfrac{1}{3},\; a_3 = \tfrac{1}{2} + 3.$$

Таким чином, першим прибіг онук, другим – тато, останнім – дідусь.

2. З 22-х карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 22, склали 11 дробів (перегортати картки не можна). Яка найбільша кількість цілих чисел може виявитись серед отриманих дробів?

Відповідь: 10 дробів.
***Розв'язання*.** Прості числа $13, 17, 19$ можуть дати ціле число лише за умови, що вони стоять у чисельнику та у них в знаменнику стоятиме 1, тому принаймні один дріб буде не цілим числом. Покажемо, як зробити так, щоб 10 дробів були цілими числами:

$$\frac{22}{11}, \frac{14}{7}, \frac{15}{5}, \frac{21}{3}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{12}{6}, \frac{19}{1}, \frac{4}{2}, \frac{13}{17}.$$

3. По кругу вишукувалися 30 дітей – хлопчиків та дівчат. При цьому виявилось, що немає жодної дитини, у якої обидва сусіди – хлопчики. Яка при цьому може бути найменша кількість дівчат?

Відповідь: 16.
***Розв'язання*.** Розглянемо групу хлопців, що стоять поспіль. Їх у групі не більше двох. Так само розглянемо групи дівчат, що не розділені хлопчиками. Їх у групі не менше двох. Таким чином ці групи йдуть по черзі, тому їх однакова кількість. При цьому, виходячи із структури груп за кількістю дітей, дівчат не менше ніж хлопців. Якщо припустити, що їх порівну, тобто по 15, то хлопців не менше 8 груп, але тоді й дівчат не менше 8 груп, звідси дівчат не менше 16, а тому їх загальна кількість більше зазначених 30. Одержана суперечність показує, що хлопців не більше 14. Тоді дівчат не менше 16.
Те, що потрібна розстановка існує – очевидно. Розглянемо 7 груп хлопців по 2, які чергуються з 6 групами дівчат по 2 та однією групою з 4 дівчат.

4. На папері в клітину нарисований квадрат, сторони якого йдуть по лініях клітин. У квадраті провели одну з діагоналей та усі клітини, через центри яких проходить проведена діагональ, пофарбовані в чорний колір. Після цього клітини квадрату, що розташовані над чорними деяким чином поділили на дві фігури,

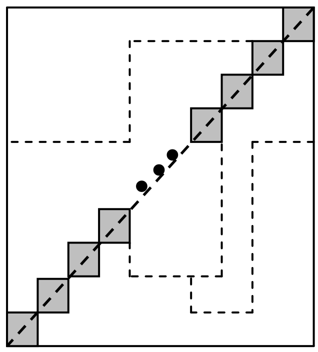


Рис. 1

а клітини, що розташовані під чорними – на 3 фігури, наприклад, як це показане на рис. 1. Площі (кількість клітин) чотирьох з п'яти фігур виявились такими – 70, 80, 90 та 100. Якою може бути площа п'ятої фігури?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $x = 40$.

Розв'язання. Позначимо площі цих п'яти шматочків $a = 70$, $b = 80$, $c = 90$, $d = 100$ та невідома площа п'ятої фігури x. Оскільки площа під чорними та над чорними клітинами співпадають, то сума двох з наведених доданків повинна дорівнювати сумі трьох. Таким чином, виходячи з умов задачі, повинна справджувати одна з наведених рівностей:

1. $a + c + x = b + d$, тобто $160 + x = 180$, звідки $x = 20$;
2. $a + b + x = c + d$, тобто $150 + x = 190$, звідки $x = 40$;
3. $a + x = b + c + d$, тобто $70 + x = 270$, звідки $x = 200$;
4. $b + x = a + c + d$, тобто $80 + x = 260$, звідки $x = 180$;
5. $c + x = a + b + d$, тобто $90 + x = 250$, звідки $x = 160$;
6. $d + x = a + b + c$, тобто $100 + x = 240$, звідки $x = 140$.

Але крім того сума площ усіх п'яти шматочків повинна дорівнювати площі квадрата, без його діагоналі. Якщо позначити сторону квадрата через n, то сума площ п'яти фігур повинна мати вигляд: $n^2 - n = n(n-1)$.

1. Для цього випадку маємо, що $a + b + c + d + x = 360$. Цей випадок не можливий, оскільки
$$18 \cdot 19 = 342 < 360 < 19 \cdot 20 = 380.$$
2. Для цього випадку маємо, що $a + b + c + d + x = 380$. З попередніх нерівностей бачимо, що цей випадок можливий при $n = 20$.
3. Тут $a + b + c + d + x = 540$, $22 \cdot 23 = 506 < 540 < 23 \cdot 24 = 552$.
4. Тут $a + b + c + d + x = 520$, $22 \cdot 23 = 506 < 520 < 23 \cdot 24 = 552$.
5. Тут $a + b + c + d + x = 500$, $21 \cdot 22 = 462 < 500 < 22 \cdot 23 = 506$.
6. Тут $a + b + c + d + x = 480$, $21 \cdot 22 = 462 < 480 < 22 \cdot 23 = 506$.

1				
2				
3				
4				
	а	б	в	г

Рис. 2

3.1. У таблиці 4×4, що показана на рис. 2, треба у 4 комірки поставити по одній зірочці таким чином, щоб ця розстановка задовольняла такі умови: у кожному стовпчику та кожному рядку не повинно бути більше однієї зірочки, жодні дві зірочки не мають стояти у сусідніх по діагоналі комірках. У яких полях можуть стояти зірочки? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: «а2», «б4», «в1», «г3» або «а3», «б1», «в4», «г2».

Розв'язання. Якщо зірочка розташована в клітині «а1», то вона не може стояти у стовпчику «а», рядку «1» та полі «б2». Якщо друга зірочка в полі «б3», то в стовпчик «в» вже не можна поставити зірочку. Таким чином друга зірочка на полі «б2», залишаються вільними поля квадрату «вг» – «23», куди очевидно дві зірочки не попадають. Таким чином кутові клітини вільні від зірочок.

Нехай зірочка в полі «а2», тоді єдине поле далі «б4», і однозначно «в1» та «г3».

Зрозуміло, що є ще аналогічне розташування.

4.1. Чому дорівнює площа чотирикутника $ABCD$, що зображений на рис. 3, якщо сторона малого квадратика дорівнює 1 см?

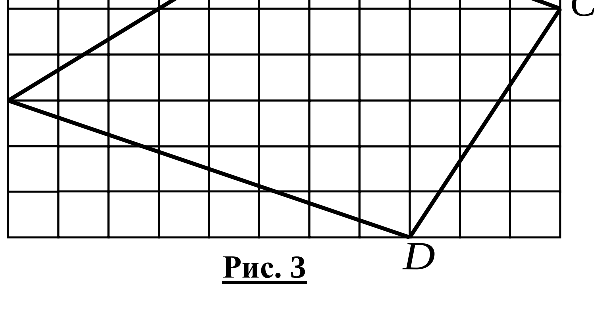


Рис. 3

Відповідь: 46.

Розв'язання. В основі міркувань – діагональ прямокутника розбиває його на два трикутники однакової площі. Проведемо відрізки PC, BS, AR та DQ (рис. 4). Тоді з наведених міркувань:

$$S_{PBC} = \tfrac{1}{2} S_{PBCK} = 5,\ S_{BSA} = \tfrac{1}{2} S_{BSAL} = 12,$$

$$S_{ARD} = \tfrac{1}{2} S_{ARDM} = 16,\ S_{CQD} = \tfrac{1}{2} S_{CQDN} = 9.$$

Звідси, площа чотирикутника дорівнює площі цих чотирьох трикутників та площі квадрату $PQRS$.

$$S_{ABCD} = 5 + 12 + 16 + 9 + 4 = 46.$$

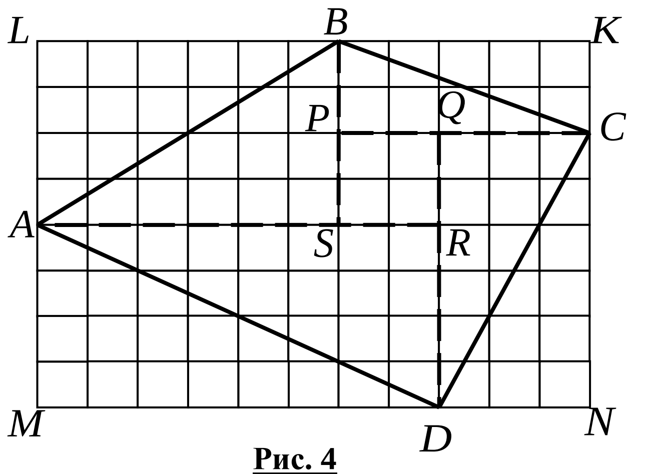


Рис. 4

8 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

Відповідь: 8 чисел.

Розв'язання. Очевидно, що усі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням $12, 32, \dots, 92$ та $16, 36, \dots, 96$. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Порахуємо їх кількість:

З трьох цифр 4 (або 8) -- таке число єдине.

З двох цифр 4 та однієї 8 (або навпаки) -- таких чисел три.

Разом – 8 чисел.

2. Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел (x, y), що задовольняє рівність:

$$\tfrac{1}{2}(x^2 - y^3) = 2016.$$

(Рожкова Марія)

Відповідь: $x = 64;\ y = 4$.

Розв'язання. Перепишемо умови задачі таким чином:

$$x^2 - y^3 = 2 \cdot 2016 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^6 \cdot (64 - 1) = 2^{12} - 2^6.$$

Неважко побачити як шукані розв'язки легко знаходяться.

3. Андрій, Богдан та Олеся йшли однією дорогою від будинку до школи. Андрій йшов зі швидкістю a км/год протягом $(2 - b)$ годин, Богдан йшов зі швидкістю b км/год протягом $(2 - c)$ годин, Олеся йшла зі швидкістю c км/год протягом $(2 - a)$ годин, де a, b, c – деякі, необов'язково цілі, числа. Яка відстань між будинком та школою, якщо відомо, що вона вимірюється цілою кількістю кілометрів?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $S = 1$ км.

Розв'язання. Запишемо рівності, які визначаються умовами задачі:

$$S = a(2-b),\ S = b(2-c),\ S = c(2-a),$$

де S - натуральне число, що дорівнює шуканій відстані від дому до школи.
Без обмеження загальності будемо вважати, що $a \geq b$. Якщо $a > b$, то, якщо швидкість більша на той самий шлях, то час менший, тобто $2-b < 2-c$ або $b > c$. Звідси аналогічно маємо, що $2-c < 2-a$ або $c > a$. Таким чином, одержали суперечність. Так само отримаємо суперечність у припущенні, що $a < b$. Залишається можливість $a = b = c$. Тоді маємо, що $S = a(2-a)$. Покажемо, що $S = a(2-a) \leq 1$. Дійсно, $2a - a^2 \leq 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$. Таким чином маємо, що з одного боку S - натуральне число, з іншого $S \leq 1$. Звідси $S = 1$.

Зауваження. Або інше пояснення до другої частини доведення. Маємо, що $S^3 = abc(2-a)(2-b)(2-c)$. Оскільки для кожної пари множників $a(2-a) \leq 1$, то $S^3 \leq 1$, звідси $S = 1$.

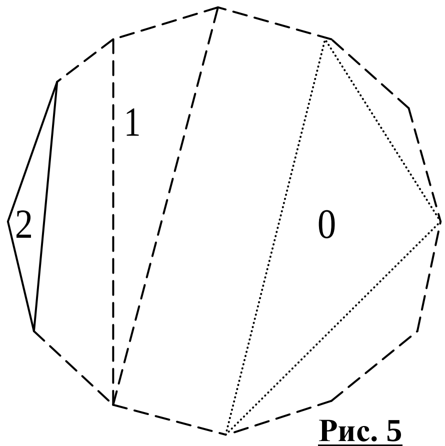


Рис. 5

4. На колі вибрані 2016 точок. Вони послідовно з'єднані за рухом годинникової стрілки таким чином, що утворився 2016-кутник. Аліса та Базиліо по черзі (розпочинає Базиліо) проводять в ньому діагоналі, які можуть перетинатися лише у вершинах багатокутника, доти, доки це можливо. По завершенню гри, багатокутник буде розбитий на трикутники, які діляться на три типи – нульові, одиничні та двійкові, в залежності від того, скільки із сторін трикутника співпадає зі сторонами заданого багатокутника (рис. 5). За кожний нульовий трикутник у прикінцевому розподілі Аліса отримує 1 золотий, а Базиліо отримує 1 золотий за кожний двійковий трикутник. Хто з них може отримати більше золотих та на скільки при правильній грі обох?

Відповідь: Аліса на 2 золотих.
Розв'язання. Нехай вийшло a нульових, b одиничних та c двійкових. З умови на кількість сторін 2016-кутника маємо, що $b + 2c = 2016$. Крім того, з загальної кількості трикутників маємо, що $2014 = a + b + c$. Звідси $c = a + 2$. Таким чином, як би не проводили ці діагоналі Аліса та Базиліо, у Аліси буде на 2 золотих більше.

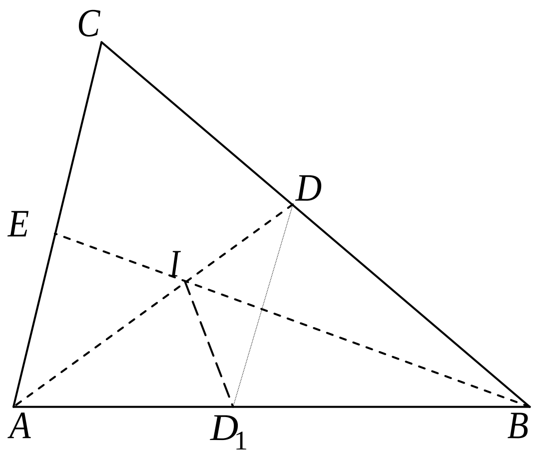


Рис. 6

5. У трикутнику ABC проведено бісектриси AD та BE. Доведіть, що $\angle ACB = 60°$ тоді і тільки тоді, коли $AE + BD = AB$.

(Хілько Данило)

Розв'язання. Позначимо точку перетину бісектрис ΔABC через I (рис. 6). Також відмітимо точку D_1, яка є симетричною до точки D відносно бісектриси BE. Тоді $DB = BD_1$ та $DI = ID_1$. Незалежно від умов, які дано в задачі, точка $D_1 \in AB$, бо в рівнобедреному ΔDBD_1 пряма BE містить висоту, а тому є бісектрисою кута $\angle DBD_1$. Якщо ΔABC $\angle ACB = 60°$, то, як відомо, $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB = 120°$. Тоді $\angle DIB = 60° = \angle D_1IB$, бо ΔDBD_1 рівнобедрений. Звідси, $\angle EIA = 60° = \angle AIB - \angle D_1IB$ Тоді трикутники $\Delta AIE = \Delta AID_1$ за спільною стороною і двома прилеглими кутами, тому $EA = AD_1$ і $AE + BD = AB$.

Навпаки, якщо $AE + BD = AB$, то $EA = AD_1$, а тому $\Delta AIE = \Delta AID_1$ за двома сторонами і кутом між ними. Тоді $\angle EIA = \angle AID_1$. Також з рівнобедреності ΔDBD_1 $\angle DIB = \angle D_1IB$. Звідси, $\angle EIA + \angle DIB = \angle AIB = \angle EID$, а тому $120° = \angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB \Rightarrow \angle ACB = 60°$.

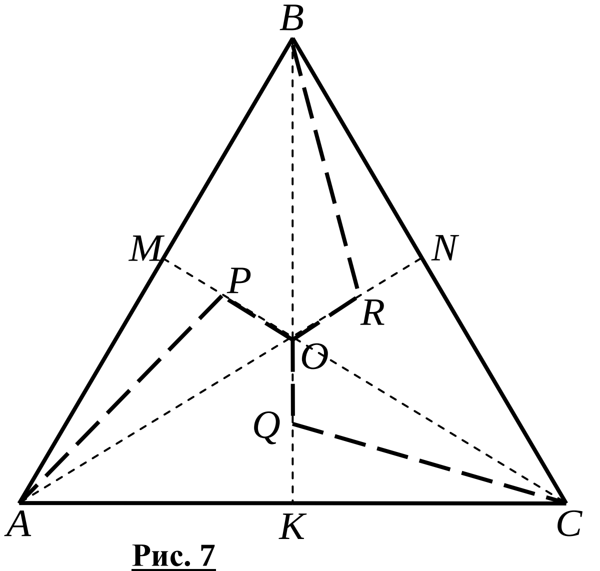


Рис. 7

4.1. Чи можна розрізати рівносторонній трикутник на:

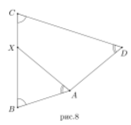
а) три однакових чотирикутники;

б) три однакових п'ятикутники?

Чотирикутники та п'ятикутники не обов'язково опуклі.

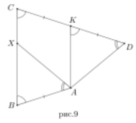
***Відповідь*: а), б)** так, можна.

Розв'язання*. *а) Розглянемо рівносторонній ΔABC, позначимо середини його сторін через M, N, K відповідно (рис. 7). Відрізки AN, BK та CM перетинаються в точці O. Для розбиття на однакові чотирикутники достатньо розглянути, наприклад, чотирикутники $BMON$, $CKON$ та $AMOK$.



б) позначимо тепер середини відрізків OM, ON та OK через P, R та Q відповідно. Шуканими п'ятикутниками є $ABROP$, $ROQCB$ та $APOQC$.

5.1. У чотирикутнику $ABCD$, що зображений на рис. 8, справджуються рівності: $\angle ABC = \angle BCD$ та $2AB = CD$. На стороні BC вибрана така точка X, що $\angle BAX = \angle CDA$. Доведіть, що $AX = AD$.



***Розв'язання*.** Нехай K — середина сторони CD (рис. 9). Тоді $CK = DK = \frac{1}{2}CD = AB$, та оскільки $\angle ABC = \angle BCD$, то $ABCK$ — рівнобічна трапеція. Тому $AK \parallel BC$ та $\angle AKD = \angle BCD$. $\Delta ABX = \Delta DKA$ за стороною $AB = DK$ та прилеглим кутам, тому й $AX = AD$.

9 клас

1. Задача 8-1

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = y, \\ y^2 + yz + yx = z, \\ z^2 + zx + zy = x. \end{cases}$$

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $x = y = z = \frac{1}{3}$ та $x = y = z = 0$.

Розв'язання. Додамо ці рівняння і одержимо, що

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = x + y + z \text{ або } (x + y + z)^2 = x + y + z .$$

таким чином маємо два варіанти.

Варіант 1. $x + y + z = 1$. Тоді з першого рівняння одержимо, що

$$x^2 + xy + xz = x(x + y + z) = x = y ,$$

після аналогічних міркувань одержимо $x = y = z$, звідки маємо перший розв'язок $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Варіант 2. $x + y + z = 0$. Знову з першого рівняння одержимо, що

$$x^2 + xy + xz = x(x + y + z) = 0 = y ,$$

звідки одержимо $x = y = z = 0$ – другий розв'язок.

3. Знайдіть усі натуральні n, для яких число $11^n - 1$ ділиться націло на $10^n - 1$.

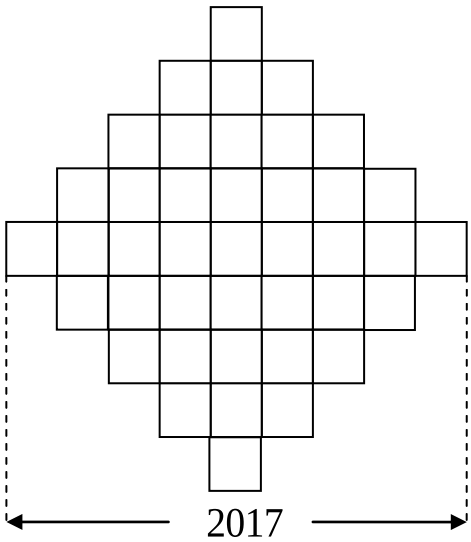


Рис. 10

Відповідь: таких натуральних n не існує.

Розв'язання. Методом від супротивного. Оскілки $10^n - 1 = 9 \cdot (10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)$, то $11^n - 1$ повинно ділитися на 9. Якщо розглянути остачі при діленні на 9 чисел $11^n - 1 \equiv 2^n - 1 \pmod 9$, матимемо таку послідовність: $1; 3; 7; 6; 4; 0; 1; \ldots$. Таким чином $n = 6k$. Але тоді $10^{6k} - 1$ ділиться на $10^6 - 1$, і далі на $10^3 + 1$, на $10 + 1$, тобто на 11, що неможливо.

4. У кожній клітині фігури «великий хрест» (рис. 10) стоїть число «$+1$». За один крок можна поміняти знак на протилежний в усіх клітинах фігури «хрест» (рис. 11), що повністю розташована всередині «великого хреста». Чи можна за скінченну кількість кроків одержати «великий хрест», що повністю заповнений числами «-1»?

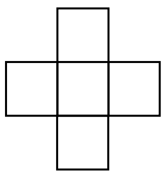


Рис. 11

(Юрченко Кирило)

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Припустимо, що це можливо. Розглянемо сукупність ходів змін знаків, за якими досягається шукана зміна усіх знаків у великому хресті на протилежні. Очевидно, що двічі змінювати знаки у хресті на тому самому місці немає сенсу, таким чином положення хреста, що були використані для зміни знаку, є унікальними. І порядок, в якому робиться зміна знаків по хрестах, не суттєвий.

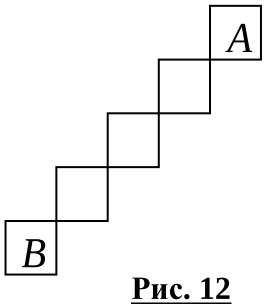


Рис. 12

Розглянемо клітини, що розташовані вздовж діагоналі, від самої верхньої «A» до самої лівої «B» (рис. 12). Для зміни знаку в клітинах «A» та «B» існує єдине розташування хреста, яке це робить. При цьому змінюється знак у сусідніх клітинах до «А» та «В». Після цього на виділеному шматочку клітин треба змінити знаки на решті 1005 клітинах. Будь-яке розташування хреста, що зачіпає цей набір клітин (і не зачіпає клітин «А» та «В», бо для них це робиться рівно 1 раз і з самого початку) змінює знак рівно у двох клітинах. Таким чином добуток клітин не змінюється на виділеному ланцюгу клітин. Але у початковий момент вона додатна, а у останній – від'ємна, що й доводить неможливість.

5. На сторонах BC та AB трикутника ABC вибрані точки A_1 та C_1 відповідно таким чином, що відрізки AA_1 та CC_1 рівні та перпендикулярні. Доведіть, що якщо $\angle ABC = 45°$, то $AC = AA_1$.

(Гоголєв Андрій)

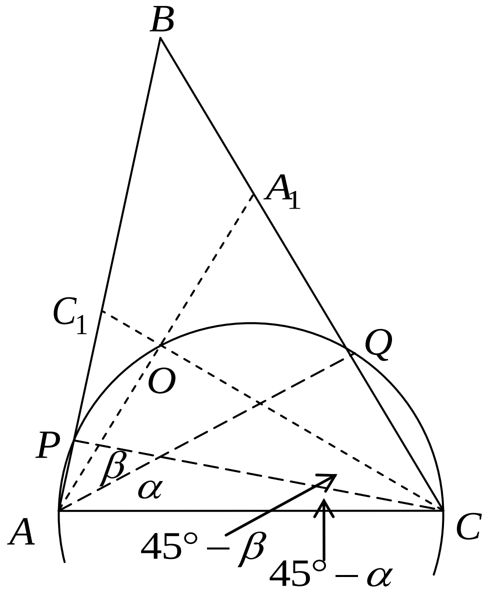


Рис. 13

Розв'язання. Нехай AA_1 та CC_1 перетинаються в точці O. Розглянемо коло з діаметром AC, тоді точка O лежить на ньому (рис. 13). Воно перетинає AB, BC в точках P, Q відповідно. Точки P та Q лежать на сторонах ΔABC, а не на їх продовженнях, бо трикутник гострокутний. Зауважимо також, що оскільки AA_1 та CC_1 – чевіани, то точка O лежить всередині ΔABC, тобто на дузі PQ побудованого кола. Доведемо, що $\angle A_1AQ = \angle QAC$. В такому разі трикутник ΔCAA_1 був би рівнобедреним, бо AQ – бісектриса та висота в ньому, тому $A_1A = AC$. Справді, припустимо, що $\angle A_1AQ = \beta > \alpha = \angle QAC$. Тоді $A_1A > AC$. Вочевидь, $\angle PBC = \angle BAQ = 45°$. Тоді

$$\angle PCC_1 = 45° - \angle OCQ = 45° - \angle OAQ = 45° - \beta.$$

Також $\angle PCA = 90° - \angle PAC = 45° - \alpha$. Оскільки $\beta > \alpha$, то $45° - \beta < 45° - \alpha$, а тобто $\angle C_1CP < \angle PCA$, а тому $CC_1 < AC$. Але $A_1A > AC$, тобто $CC_1 < AA_1$ – суперечність. Аналогічно розглядається випадок $\beta < \alpha$.

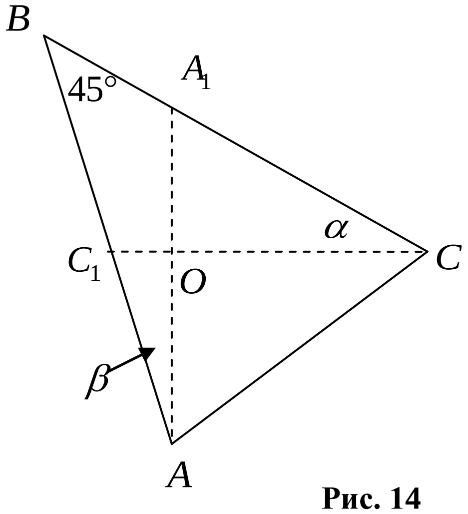


Рис. 14

Альтернативне розв'язання. Позначимо $\angle C_1CB = \alpha$, $\angle A_1AB = \beta$. Тоді оскільки $\angle OCA + \alpha + \angle OAC + \beta = 135°$ та $\angle OCA + \angle OAC = 90°$, то $\alpha + \beta = 45°$ (рис. 14). Будемо вважати, що $AA_1 = CC_1 = 1$, тоді позначимо відрізки $OC_1 = p$, $OA_1 = q$, тоді $OC = 1 - p$, $OA = 1 - q$. Оскільки $tg\ \alpha = \frac{q}{1-p}$ та $tg\ \beta = \frac{p}{1-q}$, то можемо умову $\alpha + \beta = 45°$ записати таким чином: $tg(\alpha + \beta) = 1$ або

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta} = \frac{\frac{q}{1-p} + \frac{p}{1-q}}{1 - \frac{q}{1-p} \cdot \frac{p}{1-q}} =$$

$$= \frac{q - q^2 + p - p^2}{(1-p)(1-q) - pq} = \frac{q + p - (q^2 + p^2)}{1 - p - q} = 1,$$

звідки $p^2 + q^2 - 2p - 2q + 1 = 0$. Тепер маємо, що

$$AC^2 = (1-p)^2 + (1-q)^2 = 2 - 2p - 2q + p^2 + q^2 = 1 = AA_1^2,$$

що й треба було довести.

4.1. Вершини куба деяким чином перенумеровані числами $1; 2; ...; 8$. Петрику повідомили для трьох з шести граней кубу номера вершин, що їм відповідають: $\{1; 4; 6; 8\}$, $\{1; 2; 6; 7\}$, $\{1; 2; 5; 8\}$. Чи зможе Петрик за цими даними сказати, який номер має вершина, що найбільш віддалена від вершини з номером 5?

Відповідь: зможе, це вершина з номером 6.

Розв'язання. Якщо подивитись на куб, то з кожної вершини виходить три ребра, кожне ребро є межею двох граней. Таким чином, якби Петрику були б відомі відомості одразу по усіх шести граней, то ми зробили б такі висновки. Якщо вершини сусідні по ребру, то у списку усіх граней відповідна пара номерів була б записані двічі. Якщо вершини є протилежними у одній грані, то вони потрапили б у список один раз. Якщо вони протилежні по великій діагоналі куба, то вони не зустрілися б жодного разу. Із заданих граней бачимо, що вершина з номером 1 є тричі, тобто виписані номери усіх трьох суміжних граней кубу, які мають цю вершину спільною. Таким чином три ребра кубу мають такі номери: $1-2$, $1-6$ та $1-8$. Тепер зовсім просто вже визначити нумерацію вершин (рис. 1).

5.1. На сторонах AB та AD квадрату $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $PN = NC$, точка Q – точка на відрізку AN, для якої $\angle NCB = \angle QPN$. Доведіть, що $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle PQA$.

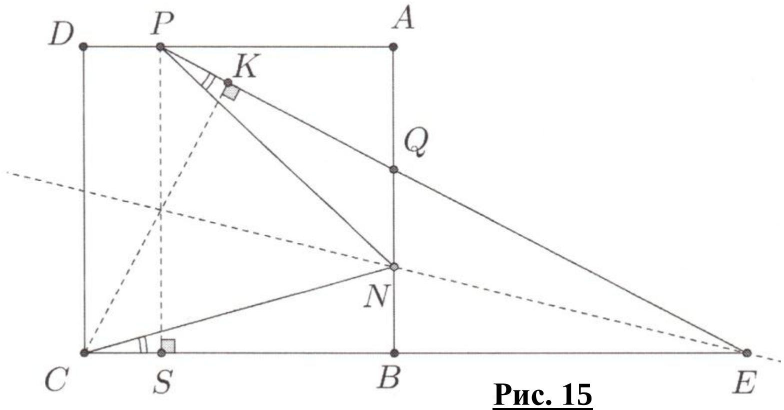


Рис. 15

Розв'язання. Нехай $E = PQ \cap BC$ (рис. 15), з рівності відрізків $PN = NC$ випливає рівність $\angle NPC = \angle PCN$. З іншого боку $\angle NCB = \angle QPN$. Звідси випливає, що ΔEPC - рівнобедрений, тому висоти $PS = CK$, тому $PS = CK = AB = BC$ і прямокутні трикутники QBC та QKC рівні. Тому CQ - бісектриса $\angle KCB$ та $\angle KQB$, тобто $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle KCB$. З іншого боку, $KCBQ$ - вписаний, тому $\angle BCK = \angle PQA$, що й завершує доведення.

10 клас

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?

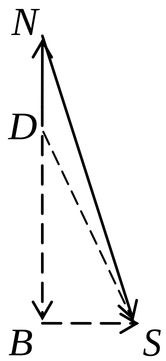


Рис. 16

Відповідь: 30.

Розв'язання. Позначимо точки таким чином: домівка – D, місце школи – S, точка де Петрик повертає на схід – B, точка, де повертає Остап – N (рис. 16). Тоді за умовою $DB = 210$, $BS = 70$, $DN = x$, $NS = y$. Крім того, з умов задачі випливає, що $x + y = 280$.

Запишемо теорему Піфагора: $BN^2 + BS^2 = NS^2$ або

$$(210+x)^2 + 70^2 = y^2 \Rightarrow (210+x)^2 + 70^2 = (280-x)^2.$$

$$44100 + 420x + x^2 + 4900 = 78400 - 560x + x^2, \text{ звідки } x = 30.$$

2. Є 12 стільців, розташованих в одну лінію та перенумеровані зліва направо числами $1; 2; \ldots; 12$. Отець Федір може стрибати по цих стільцях за такими правилами: зі стільця з номером k він може стрибнути на стілець з номером n тоді і тільки тоді, коли $|k-n|=5$ або $|k-n|=8$. Відомо, що отець Федір, розпочавши з деякого стільця, зміг пострибати по них так, що побував на кожному стільці рівно 1 раз. Із стільця з яким номером отець Федір мав почати стрибати?

<u>Відповідь</u>: № 5 або № 8.

<u>Розв'язання</u>. Випишемо список пар стрибків, які міг зробити коник:

$$1 \leftrightarrow 6,\ 1 \leftrightarrow 9,\ 2 \leftrightarrow 7,\ 2 \leftrightarrow 10,\ 3 \leftrightarrow 8,\ 3 \leftrightarrow 11,\ 4 \leftrightarrow 9,\ 4 \leftrightarrow 12,\ 5 \leftrightarrow 10,\ 6 \leftrightarrow 11,\ 7 \leftrightarrow 12.$$

Як бачимо, диски за номерами 5 та 8 зустрічаються тут по одному разу. Тобто, якщо коник не розпочне з такого стільця, то він на ньому має закінчувати, але таких стільців два. Тому з одного повинен розпочати, на іншому – закінчити свої стрибки, наприклад так

$$5 \to 10 \to 2 \to 7 \to 12 \to 4 \to 9 \to 1 \to 6 \to 11 \to 9 \to 3 \to 8.$$

3. Квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число N. Чи обов'язково на N ділиться кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$, якщо

а) $N = 2016$; ***б)*** $N = 2017$?

<u>Відповідь</u>: ***а)*** не обов'язково; ***б)*** обов'язково.

<u>Розв'язання</u>. ***а)*** Джерелом прикладу є той факт, що для цілих x добуток $x(x+1)$ завжди парний. Тому можна навести такий приклад шуканого тричлена:

$$1008x(x+1) + 2016 = 1008x^2 + 1008x + 2016.$$

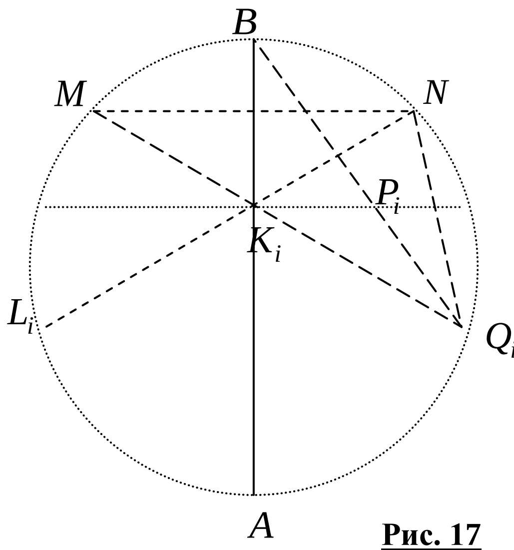
б) Нехай квадратний тричлен має такий вигляд: $f(x) = ax^2 + bx + c$, зробимо такі підстановки:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = c \,\vdots\, 2017$;

$x = 1 \Rightarrow f(1) = (a+b+c) \,\vdots\, 2017$;

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (a-b+c) \,\vdots\, 2017$.

Але тоді на 2017 діляться також числа $a+b$ та $a-b$, тому на 2017 повинні ділитися числа $2a$ та $2b$. Оскільки число 2017 непарне, то усі коефіцієнти тричлена повинні ділитися на 2017.



<u>Рис. 17</u>

4. На колі з діаметром AB вибрали та зафіксували точку M. Після цього обирається точка Q_i, для якої хорда MQ_i перетинає AB у точці K_i і при цьому $\angle MK_iB < 90°$. Хорда, яка перпендикулярна AB та проходить через точку K_i, перетинає пряму BQ_i в точці P_i. Доведіть, що точки P_i при усіх можливих виборах точки Q_i лежать на одній прямій.

(Нагель Ігор)

Розв'язання. Побудуємо хорди $MN \perp AB$, NQ_i та NL_i, яка проходить через точку K_i (рис. 17). Оскільки ΔMNK_i рівнобедрений, то K_iP_i – бісектриса $\angle NK_iQ_i$, оскільки B – середина $\cup MN$, то Q_iB – бісектриса $\angle MQ_iN = \angle K_iQ_iN$, тобто P_i – інцентр ΔNK_iQ_i, тому NP_i – бісектриса $\angle L_iNQ_i = \angle K_iNQ_i$. З того, що $\angle MK_iB < 90^\circ$ випливає, що Q_i належить меншій з двох дуг NA. Оскільки $\angle L_iNM = \angle Q_iMN$, то $L_iQ_i \parallel MN$, тому $L_iQ_i \perp AB$. Тобто A – середина $\cup L_iQ_i$. Тому точка P_i лежить на прямій NA, яка є фіксованою для заданого діаметра A та точки M.

5. Для довільних дійсних чисел x, y, z, що належать проміжку $[0;1]$, доведіть нерівність

$$\left(x^4+y^4+z^4\right)+\left(x^5+y^5+z^5\right)+(x-y)^6+(y-z)^6+(z-x)^6 \le 6.$$

Ясінський В'ячеслав

Розв'язання. Спочатку доведемо таку допоміжну нерівність: *якщо* $\alpha, \beta \in [0,1]$, то $\alpha^4+\beta^5+(\alpha-\beta)^6 \le 2$.

Дійсно, $t^n \le t$ для усіх дійсних $t \in [0,1]$ і будь-якого натурального n. Припустимо, що $\alpha \ge \beta$ (випадок $\alpha \le \beta$ розглядається аналогічно). Тоді $0 \le \alpha-\beta \le 1$, а це означає, що $(\alpha-\beta)^6 \le \alpha-\beta$. Крім того, $\alpha^4 \le \alpha$ і $\beta^5 \le \beta$. Додавши останні три нерівності, одержимо:

$$\alpha^4+\beta^5+(\alpha-\beta)^6 \le \alpha+\beta+\alpha-\beta = 2\alpha \le 2,$$

що і треба було довести.

А тепер перейдемо до розв'язування нашої задачі. Оскільки $x, y, z \in [0,1]$, то мають місце такі три нерівності:

$$x^4+y^5+(x-y)^6 \le 2,\ y^4+z^5+(y-z)^6 \le 2,\ z^4+x^5+(z-x)^6 \le 2.$$

Додавши ці три нерівності, одержимо нерівність, яку потрібно було довести.

4.1. Задача 9-5.1

5.1. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c=1$, доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \le \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Розв'язання. Розглянемо такі перетворення:

$$\frac{a}{a+b^2}=\frac{a}{a(a+b+c)+b^2}=\frac{a}{a^2+ab+ac+b^2} \le \frac{a}{2ab+ab+ac}=\frac{1}{3b+c},$$

з нерівності між середніми маємо, що

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{4}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{b+b+b+c}{4}=\frac{3b+c}{4} \text{ або } \frac{16}{3b+c} \le \frac{3}{b}+\frac{1}{c}.$$

Тепер попередня нерівність підсилюється таким чином: $\frac{a}{a+b^2} \le \frac{1}{3b+c} \le \frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Якщо тепер додати аналогічні 3 нерівності, матимемо:

$$\frac{a}{a+b^2}+\ldots\le\frac{1}{3b+c}+\ldots\le\frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right)+\ldots=\frac{1}{16}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

11 клас

1. Порівняйте три числа: $A=11$, $B=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{2015}2016$ та $C=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{2016}2015$.

Відповідь: $C<B<A$.

Розв'язання. Оскільки для натуральних n справджується нерівність $\log_{n+1}n<1$, то очевидно, що $C<1$. Для числа B маємо, що $B\cdot C=1$, звідки $B>1$, а також

$$B=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg 2016}{\lg 2015}=\frac{\lg 2016}{\lg 2}<11=A\ \Leftrightarrow\ \lg 2016<11\lg 2=\lg 2^{11}\ \Leftrightarrow\ 2016<2^{11}=2048.$$

2. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$?

Відповідь: обов'язково.

Розв'язання. Дивись розв'язання **задачі 10.3** ***б)***.

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a,b,c, що задовольняють умови:

$$ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=ca\left(1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right).$$

(Юрашев Владислав)

Відповідь: (t,t,t), де $t>0$.

Розв'язання. Перепишемо першу рівність таким чином:

$$\frac{a((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2}=\frac{c((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2}\ \text{або}\ \frac{a(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b)^2}=\frac{c(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}.$$

Після чергового скорочення маємо, що

$$\frac{a(a+b-c)}{(a+b)^2}=\frac{c(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

Якщо припустити, що $c\ge a+b$, то $b+c>a$, таким чином ліва частина недодатна, а права – додатна. Одержана суперечність показує, що справджуються нерівності $b+c>a$, $a+c>b$ та $b+a>c$, таким чином можна вважати, що a, b, c - сторони деякого трикутника.

Але тоді рівності, що задані в умові задачі – це є рівності трьох бісектрис трикутника. Дійсно: $l_c^2=ab-a_1b_1$, де a_1, b_1 - відрізки, на які розбиває ця бісектриса протилежну сторону. Тоді вони задовольняють умови: $a_1+b_1=c$ та $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}$. Звідси неважко одержати, що $a_1=\frac{ac}{a+b}$ та $b_1=\frac{bc}{a+b}$.

Тоді $l_c^2=ab-a_1b_1=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$. Таким чином з рівності трьох бісектрис з відомої властивості трикутників випливає рівність трьох сторін, тому розв'язком заданих умов будуть довільні трійки (t,t,t), де $t>0$.

4. У гострокутному різносторонньому трикутнику ABC проведено медіану AM. Її продовження перетинає описане коло w цього трикутника в точці P. Нехай AH_1 – висота ΔABC, H – точка перетину його висот. Промені MH та PH_1 перетинають коло w у точках K та T відповідно. Доведіть, що описане коло ΔKTH_1 дотикається до відрізка BC.

(Хілько Данило)

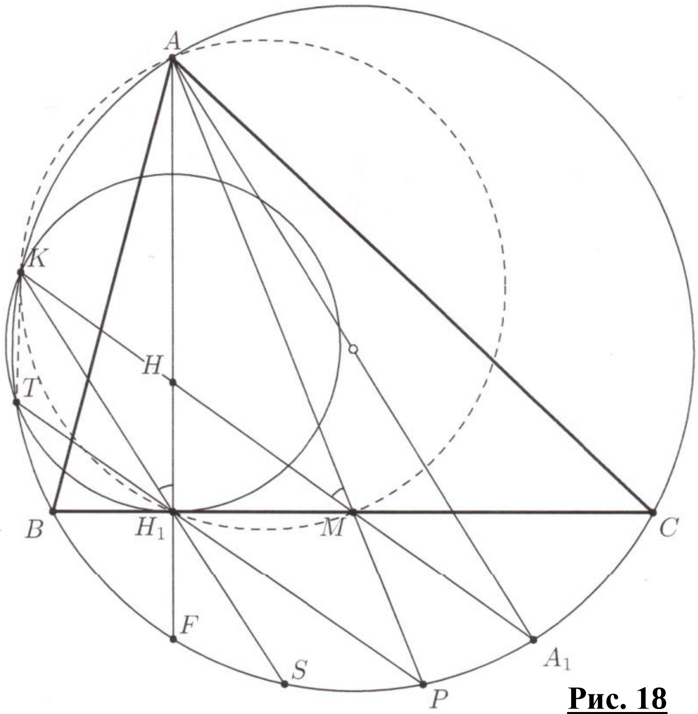


Рис. 18

Розв'язання. Для доведення заданого твердження достатньо довести, що $\angle TKH_1 = \angle TH_1B$ (рис. 18). Проведемо KH_1 до перетину з колом w у точці S. Тоді

$$\angle TKS = \angle TAB + \angle BAS,$$
$$\angle TH_1B = \angle TAB + \angle PAC,$$

отже достатньо показати, що $\angle PAC = \angle BAS$.

Позначимо через A_1 -- точку, що діаметрально протилежна точці A на колі w. Тоді $\angle A_1CA = \angle ABA_1 = 90°$, звідки $BH \parallel A_1C$ та $CH \parallel A_1B$. Тоді $BHCA_1$ -- паралелограм, а тому HA_1 проходить через точку M. Тоді K лежить на HA_1, тому $\angle A_1KA = 90°$. Звідси чотирикутник AKH_1M є вписаним. Тоді $\angle KH_1A = \angle KMA$. Нехай пряма AH_1 вдруге перетинає коло w у точці F. Тоді

$$\angle KH_1A = \angle KCA + \angle FAS, \ \angle KMA = \angle KCA + \angle PAA_1.$$

Отже $\angle FAS = \angle PAA_1$, також $\angle ABC = \angle AA_1C$, звідки $\angle BAF = 90° - \angle ABC = \angle A_1AC$. Тоді

$$\angle BAS = \angle BAF + \angle FAS = \angle PAA_1 + \angle A_1AC = \angle PAC.$$

5. Задана смуга $1\times n$, $n \ge 4$, у кожну комірку якої записане натуральне число (не обов'язково усі числа різні). Після цього під кожним числом записується натуральне число, яке дорівнює кількості таким чисел у попередньому рядку (наприклад, якщо в верхньому рядку тричі зустрічалося число 10, то під кожним з цих чисел 10 у наступному рядку буде написане число 3). Після цього з новим рядком проводиться аналогічна процедура.

а) Доведіть, що після скінченної кількості кроків рядки не будуть змінюватись.

б) Яку найбільшу кількість разів можливо, щоб наступний рядок відрізнявся від попереднього при $n = 2016$ та при довільному n?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: ***б)*** нехай k найбільше натуральне число, задовольняє умову $2^k \le n$, тоді при $n \ne 2^k + 1$, $n \ne 2^k + 2$ та $n \ne 2^k + 4$ кількість кроків $k+1$, при $n = 6$ – 3 кроки, при $n = 12$ – 4 кроки, при усіх інших – k кроків. Таким чином, оскільки $2016 = 2^{10} + 992$, то для $n = 2016$ можна максимум зробити 11 кроків.

Розв'язання. Набір чисел наступного рядка не залежать від порядку чисел у попередньому, тому у кожному рядку можемо переставити числа таким чином, щоб вони йшли у порядку зростання. Позначимо початковий рядок як нульовий, наступні – відповідно першій, другий…
Розглянемо властивості чисел у рядках, починаючи з першого.

Лема 1. Якщо число n зустрічається в k-му рядку, то кількість чисел n кратна n.

Доведення. У першому рядку число n виникає, якщо у нульовому рядку є n однакових чисел, наприклад m. Тоді під цими n числами m запишеться група чисел n. Якщо інше деяке число l у нульовому рядку зустрічається також n разів, то виникне ще одна група з n чисел, кожне з яких дорівнює n. Число n у рядках, починаючи з першого, може виникнути за рахунок того, що у попередньому рядку вже були числа n, під якими знову було написане n, або утворилася група інших чисел, яких стало рівно n. Таким чином їх кількість кратна n.
Лема доведена.

Лема 2. Якщо є у k-му рядку група чисел, що дорівнюють n, то під цими числами завжди буде записане однакове число, але не обов'язково n.

Доведення. Це випливає з простої властивості, якщо у попередньому рядку два однакових числа, то і далі під ними будуть лише однакові числа.
Лема доведена.

Розглянемо перший рядок. Нехай там найменше число l. Це означає, що кількість таких чисел l тут буде sl, $s \geq 1$. При цьому усі інші числа мають значення більші від l.
Якщо число l зустрічається рівно l разів, то під кожним з цих чисел до кінця будуть записуватись лише числа l. Меншими вони стати не можуть, бо їх рівно l, а збільшитись також не можуть, бо для цього треба, щоб з'явилися числа, яких так само l, а таких більше немає. Таким чином ці числа взагалі можна в подальшому прибрати з розгляду. Таким чином ми маємо новий рядок чисел, в якому $n-l$ чисел. Тепер вже в цьому рядку шукаємо найменше число.
Якщо найменше число l зустрічається рівно sl разів, $s>1$, то у другому рядку під кожним з таких чисел буде написане число sl. Розглянемо також у першому рядку деяке число m, яке задовольняє умови: $l<m<2l$. Виходячи з аналогічних міркувань, якщо їх рівно m, то вони вже не зможуть змінюватись від рядка до рядка. Числа, що менші від m або не змінюються, тоді вони не впливають на зміни чисел m, або збільшуються не менше ніж у два рази, а тому число m під ними з'явитись не може. Такі числа також можна в подальшому не розглядати. Якщо таких чисел tm штук, то вони замінюються кожне на число tm.
Таким чином з усіх чисел, які слід розглядати (тобто числа під якими можуть з часом змінитись) у другому рядку найменше $2l$.
Аналогічно, якщо розглянути другий рядок та найменше число l_2, які там слід розглядати, то у третьому рядку найменше число, що слід розглядати дорівнюватиме $2l_2$ і так далі.
Зрозуміло, що не може з'явитись у таблиці число більше за n. Тому максимальна кількість кроків, коли в таблиці щось може змінитись складає максимальне k, для якого справджується умова $2^k \leq n$.
Нагадаю, що тут ми не враховували ще один крок – перехід від нульового до першого рядка. Таким чином максимум може біти рівно $k+1$ крок.

Тепер наведемо приклад, що дійсно таку кількість разів рядки можуть змінюватись. Позначимо через k – таке найбільше число, для якого $2^k \leq n$.
Нехай у нульовому рядку числа мають такий вигляд:

$$(n-1), (1), (2, 2), (4, 4, 4, 4), \ldots, (\underbrace{2^{k-1}, 2^{k-1}, \ldots, 2^{k-1}}_{2^{k-1}}), (\underbrace{m, m, \ldots, m}_{m}) \quad (\underline{\textit{0-й рядок}})$$

Тут нехай $m = 2^k - n \neq 2^i$ для жодного цілого невід'ємного i. Тоді інші рядки мають такий вигляд:

$$(1,1),(2,2),(4,4,4,4),\ldots,(\underbrace{2^{k-1},2^{k-1},\ldots,2^{k-1}}_{2^{k-1}}),(\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m})\quad (\underline{1\text{-й рядок}})$$

$$(2,2,2,2),(4,4,4,4),\ldots,(\underbrace{2^{k-1},2^{k-1},\ldots,2^{k-1}}_{2^{k-1}}),(\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m})\quad (\underline{2\text{-й рядок}})$$

$$(4,4,4,4,4,4,4,4),\ldots,(\underbrace{2^{k-1},2^{k-1},\ldots,2^{k-1}}_{2^{k-1}}),(\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m})\quad (\underline{3\text{-й рядок}})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\underbrace{2^{k-1},2^{k-1},\ldots,2^{k-1}}_{2^{k}}),(\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m})\quad (\underline{k\text{ -й рядок}})$$

$$(\underbrace{2^{k},2^{k},\ldots,2^{k}}_{2^{k}}),(\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m})\quad (\underline{k\text{ -й рядок}})$$

Проаналізуємо тепер чи принциповою є умова $m=2^k-n=2^i$. Якщо є група чисел у першому рядку, кількість яких 2^i, то там повинна вже бути група чисел 2^i, які на наступному кроці дадуть групу 2^{i+1}, а тому при наведеному вище процесі, коли числа змінюються за степенями двійки: $2^0\to 2^1\to 2^2\to\ldots\to 2^i$, при наступному кроці числа вже не зміняться і процес триватиме меншу кількість кроків.

Наприклад, якщо є 5 чисел з самого початку, тобто маємо такі оцінки: $2^2=4<5$, тому з оцінки можна очікувати 3 кроки. Але якщо розглянути набір чисел у нульовому рядку $1;\ 4;\ 2;\ 2;\ 5$. Тоді ми маємо, що у першому рядку будуть такі числа: $1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 1$, у другому: $3;\ 3;\ 2;\ 2;\ 3$. Така саме ситуація при $n=2^s+1$ числах. Аналогічно, якщо чисел $n=2^s+2$, бо тоді утвориться або група з двох однакових числах, або два окремих числа у нульовому рядку. Останній варіант, коли не можна збільшити кількість чисел – $n=2^s+4$, тут маємо, що розклад 4 на натуральні доданки також обов'язково містить степінь двійки. За таких умов на першому кроці виникне група не з двох, а трьох одиниць. Таким чином повинна виконуватись не умова $2^k\le n$, а $3\cdot 2^{k-1}\le n$. З'ясуємо для яких n це можливо. $3\cdot 2^{k-1}\le n=2^k+4$. Тоді $2^{k-1}\le 4$, або $k\le 3$. Тобто для $n=5$, $n=6$ та $n=12$. Для $n=5$ ми вже бачили, що таке неможливе, для $n=6$ маємо таку ситуацію у нульовому рядку:

$$1;\ 2;\ 2;\ 2;\ 5;\ 6\ \to\ 1;\ 3;\ 3;\ 3;\ 1;\ 1\ \to$$
$$3;\ 3;\ 3;\ 3;\ 3;\ 3\ \to\ 6;\ 6;\ 6;\ 6;\ 6;\ 6,$$

аналогічно для $n=12$.

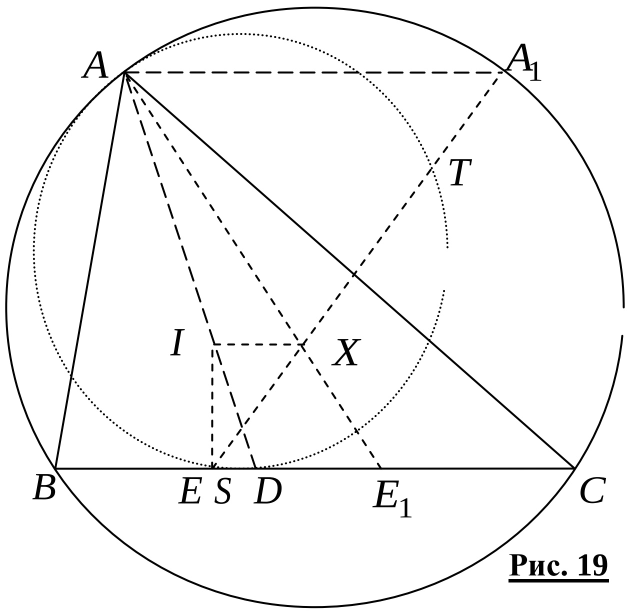


Рис. 19

Для ситуації $2^i\ge 8$ достатньо просто в основному варіанті замість групи $(\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m})$ утворити дві групи: $(\underbrace{s,s,\ldots,s}_{s})$ та $(\underbrace{t,t,\ldots,t}_{t})$, де $s=2^{i-1}-1$ та $t=2^{i-1}+1$, які не будуть змінюватись протягом усіх кроків і не заважатимуть основному варіанту.

4.1. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD, E – точка дотику вписаного кола до сторони BC, I – центр вписаного кола ΔABC. Точка A_1 на описаному колі ΔABC така, що $AA_1 \parallel BC$. Позначимо через T – другу точку перетину прямої EA_1 та описаного кола ΔAED. Доведіть, що $IT = IA$.

Розв'язання. Позначимо через E_1 точку на відрізку BC, для якої $BE = E_1C$ (рис. 19). Нехай $X = A_1E \cap E_1A$. Тоді доведемо, що $IX \parallel BC$.
Нехай $\angle B > \angle C$ та R - радіус описаного кола ΔABC.

$$\frac{AX}{XE_1} = \frac{AA_1}{EE_1} = \frac{AA_1}{AC-AB}, \quad \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB+AC}{BC}.$$

З теореми косинусів маємо, що

$$AC^2 - AB^2 = BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle B,$$

З рівнобедреної трапеції

$$AA_1 = BC - 2BH = BC - 2AB\cos\angle B.$$

Звідси маємо, що $AA_1 \cdot BC = AC^2 - AB^2$. Тому $\frac{AX}{XE_1} = \frac{AI}{ID}$, звідки $IX \parallel BC$.

З вписаного чотирикутника $DEAT$ та одержаної паралельності $IX \parallel BC$ чотирикутник $IATX$ - вписаний. Пари точки A, A_1 та E, E_1 симетричні відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, то $XE = XE_1$. Тоді

$$\angle ATI = \angle AXI = \angle XE_1E = \angle XEE_1 = \angle IXE = \angle TAI,$$

звідки остаточно знаходимо, що $IT = IA$.

5.1. Для яких натуральних $n \geq 3$ можна за скінченну кількість кроків з набору чисел $1; 2; \ldots; n$ отримати набір з n однакових чисел, якщо за один крок можна вибирати два довільних числа та збільшити кожне з них на довільне однакове натуральне число?

Відповідь: $n \neq 4k+2$.
Розв'язання. Для $n = 4k$ це можливо. Робимо це так:

$$(1; 3) \to (2; 4), \ldots, (4k-3; 4k-1) \to (4k-2; 4k).$$

Тепер ми маємо, що на дошці записані усі парні числа. При цьому кожне число зустрічається рівно двічі. Тепер їх усі не важно зробити рівними $n = 4k$.

Для $n = 2k+1$ це можливо, робимо це так:

$$(1; n) \to (2; n+1), (3; n+1) \to (4; n+2), \ldots, (n-2; \tfrac{3n-3}{2}) \to (n-1; \tfrac{3n-1}{2}).$$

Тепер ми маємо, що на дошці записані усі парні числа, що менші від n. При цьому кожне число зустрічається рівно двічі. А також записане число $\frac{3n-1}{2}$. Залишається усі пари однакових чисел прирівняти до цього найбільшого числа.

Доведемо методом від супротивного, що для $n = 4k+2$ це неможливо. Сума чисел з самого початку – непарна: $1+2+\ldots+4k+2 = \frac{1}{2}(4k+2)(4k+3) = (2k+1)(4k+3)$. Кожного разу суму усіх чисел ми збільшуємо на парне число, але наприкінці ми маємо усі однакові числа, тобто парну суму. Одержана суперечність завершує доведення.