Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік
2 тур

9 клас

1. У кожну комірку таблиці 3×3 записане деяке натуральне число (не усі числа обов'язково різні) таким чином, що шість сум чисел – трьох рядків та трьох стовпчиків – попарно різні. Яке найменше значення може мати сума усіх 9 чисел таблиці?

2. Точки D, E, F лежать на описаному колі ΔABC таким чином, що AD, BE, CF - діаметри цього кола. Прямі CD, AE, BF у перетині утворюють $\Delta A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

3. Знайдіть усі такі функції $f: \mathrm{Z}^+ \to \mathrm{Z}^+$, для яких справджуються такі умови:

- $f(mn) = f(m) + f(n)$;
- $f(2016) = 0$;
- $f(n) = 0$, якщо $n \equiv 5 \pmod{2016}$.

Z^+ -- *це множина натуральних чисел та* 0.

4. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c справджується нерівність:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)^2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

24 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Министерство образования и науки Украины
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Задания III этапа Всеукраинской олимпиады по математике 2015-2016 года
2 тур

9 класс

1. В каждую ячейку таблицы 3×3 записано некоторое натуральное число (не все числа обязательно разные) так, что шесть сумм чисел – трех строк и трех столбцов – попарно разные. Какое наименьшее значение может иметь сумма всех 9 чисел таблицы?

2. Точки D, E, F лежат на описанной окружности ΔABC так, что AD, BE, CF - диаметры этой окружности. Прямые CD, AE, BF в пересечении образуют $\Delta A_1B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

3. Найдите все такие функции $f: Z^+ \to Z^+$, для которых выполняются такие условия:

- $f(mn) = f(m) + f(n)$;
- $f(2016) = 0$;
- $f(n) = 0$, если $n \equiv 5 \pmod{2016}$.

Z^+ -- *это множество натуральных чисел и* 0.

4. Докажите, что для произвольных положительных чисел a, b, c выполняется неравенство:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(ab + bc + ca)^2}.$$

24 января 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов