

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік
2 тур

10 клас

1. Для кожного натурального n многочлен $P(n)$ задовольняє умову $P(5^n - 1) = 5^{5^n} - 1$. Чому дорівнює величина $P(3)$?

2. Всередині заданого квадрату $ABCD$ зі стороною 1 вибирається точка P . Пряма DP перетинає відрізок AC у точці E . Пряма CP перетинає відрізок BD у точці F . Знайдіть геометричне місце таких точок P , для яких відрізок $EF \parallel AD$.

3. Знайдіть усі такі функції $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, для яких справджуються такі умови:

- $f(mn) = f(m) + f(n)$;
- $f(2016) = 0$;
- $f(n) = 0$, якщо $n \equiv 5 \pmod{2016}$.

\mathbb{Z}^+ -- це множина натуральних чисел та 0.

4. Яких трикутників з цілими сторонами більше – таких, що мають периметр 2013 чи таких, що мають периметр 2016?

24 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Задания III этапа Всеукраинской олимпиады по математике 2015-2016 года
2 тур

10 класс

1. Для каждого натурального n многочлен $P(n)$ удовлетворяет условию $P(5^n - 1) = 5^{5^n} - 1$. Чему равна величина $P(3)$?

2. Внутри заданного квадрата $ABCD$ со стороной 1 выбирается точка P . Прямая DP пересекает отрезок AC в точке E . Прямая CP пересекает отрезок BD в точке F . Найдите геометрическое место таких точек P , для которых отрезок $EF \parallel AD$.

3. Найдите все такие функции $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, для которых выполняются такие условия:

- $f(mn) = f(m) + f(n)$;
- $f(2016) = 0$;
- $f(n) = 0$, если $n \equiv 5 \pmod{2016}$.

\mathbb{Z}^+ -- это множество натуральных чисел и 0.

4. Каких треугольников с целыми сторонами больше – таких, которые имеют периметр 2013 или таких, которые имеют периметр 2016?

24 января 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов