

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік
2 тур

11 клас

1. На кожній грані кубу написано натуральне число. Після цього у кожній вершині напишемо число, що дорівнює добутку трьох чисел, що написані на трьох гранях з цією вершиною. Знайдіть суму усіх чисел на гранях, якщо сума чисел у вершинах дорівнює 2015.

2. Всередині заданого квадрату $ABCD$ зі стороною 1 вибирається точка P . Пряма DP перетинає відрізок AC у точці E . Пряма CP перетинає відрізок BD у точці F . Знайдіть геометричне місце таких точок P , для яких відрізок $EF \parallel AD$.

3. Знайдіть усі такі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких для усіх дійсних чисел x, y справджується рівність:

$$f(xf(x) + f(xy)) = f(x^2) + yf(x).$$

4. Для яких цілих чисел a, b вираз

$$(19a + b)^{18} + (a + b)^{18} + (a + 19b)^{18}$$

є точним квадратом цілого числа?

24 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Задания III этапа Всеукраинской олимпиады по математике 2015-2016 года
2 тур

11 класс

1. На каждой грани куба записано натуральное число. После этого в каждой вершине запишем число, равное произведению трех чисел, которые написаны на трех гранях с этой вершиной. Найдите сумму всех чисел на гранях, если сумма чисел в вершинах равна 2015.

2. Внутри заданного квадрата $ABCD$ со стороной 1 выбирается точка P . Прямая DP пересекает отрезок AC в точке E . Прямая CP пересекает отрезок BD в точке F . Найдите геометрическое место таких точек P , для которых отрезок $EF \parallel AD$.

3. Найдите все такие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых для любых действительных чисел x, y выполняется равенство:

$$f(xf(x) + f(xy)) = f(x^2) + yf(x).$$

4. Для каких целых чисел a, b выражение

$$(19a + b)^{18} + (a + b)^{18} + (a + 19b)^{18}$$

является точным квадратом целого числа?

24 января 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов